

Ον/μο.....

ΑΜ.....

1. (3.0M) Ένα σωματίδιο γνωστής μάζας m , κινείται στο χώρο με διάνυσμα θέσης: $\mathbf{r}(t) = -2\mathbf{i} + (-9 + 3t)\mathbf{j} - t(4 - t^2/3)\mathbf{k}$. Οι αποστάσεις είναι σε μέτρα και ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

(α) Ποια η επιτάχυνση του σωματιδίου; (1M) $\mathbf{a}(t) =$ _____

(β) Ποια η στροφορμή του σωματιδίου ως προς την αρχή των αξόνων; (1M)

$\mathbf{L}(t) =$ _____

(γ) Αν μεταξύ άλλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα ασκείται και η δύναμη $\mathbf{F} = (5\mathbf{i} - 4\mathbf{j})N$, ποιο είναι το έργο που παράγει στα τρία πρώτα δευτερόλεπτα της κίνησης; (1M) $W =$ _____ Joule

2. (1.5M) Σε ένα σώμα που έχει μετατοπιστεί ευθύγραμμα κατά $\mathbf{s} = -7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, εκτός άλλων δυνάμεων, δρα και η δύναμη $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$. Οι αποστάσεις είναι σε cm και η δύναμη σε N. Να υπολογίσετε:

α) το έργο (σε Joule) που παράγει η δύναμη στο σωματίδιο και (0.5M) $W =$ _____ Joule

β) τη γωνία (σε μοίρες) μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{F}$ και $\mathbf{s}$. (1.0M) $\theta =$ _____

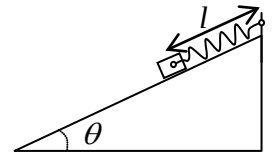
3. (1.5M) Σώμα μάζας M είναι συνδεδεμένο σε ιδανικό ελατήριο σταθεράς k_{el} με φυσικό μήκος l_0 και βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ .

α) Αν αγνοήσουμε το συντελεστή τριβής μεταξύ του σώματος και του επιπέδου να υπολογίσετε τη σχετική επιμήκυνση, l/l_0 , του ελατηρίου στην ισορροπία. (0.5M)

$l/l_0 =$ _____

β) Αν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι $\mu_s = 0.1$ υπολογίστε πόσο μπορούμε να επιμηκύνουμε το ελατήριο (από το φυσικό του μήκος) και το σώμα να παραμένει ακίνητο στο επίπεδο.

(1M) $\delta l =$ _____



4. (1M) Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται η δυναμική ενέργεια $U(x)$ ενός σωματιδίου που κινείται κατά μήκος του x -άξονα. Σε ποια από τα σημεία που επισημαίνονται στον άξονα x η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι

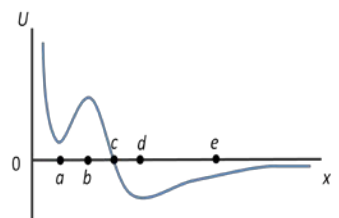
α) μηδενική, _____

και σε ποιες περιοχές η δύναμη είναι:

β) προς τη θετική διεύθυνση, _____

γ) προς την αρνητική διεύθυνση. _____

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

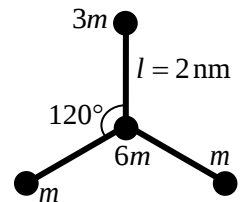


5. (2.0M) Θεωρείστε το διπλανό στερεό σώμα, που αποτελείται από τέσσερις συνεπίπεδες μάζες, στο οποίο οι αποστάσεις της όλων των μαζών από την κεντρική μάζα είναι ίσες, $l = 2\text{ nm}$ και οι γωνίες που σχηματίζουν οι άξονες ανά δύο είναι ίσες.

α) Υπολογίστε τη θέση του κέντρου μάζας και σημειώστε επάνω στο σχήμα. (0.5M)

β) Ποια η ροπή αδράνειας περί του άξονα που ορίζεται από την κεντρική μάζα και τη μάζα $3m$; (0.75M) $I_1 =$ _____

γ) Ποια η ροπή αδράνειας για ως προς άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο του σώματος και διέρχεται από το κ.μ. του σώματος; (0.75M) $I_2 =$ _____



6. (2.0M) Το διάνυσμα θέσης ενός σώματος μάζας $m_1 = 20\text{ kg}$ είναι $\mathbf{r}_1 = (-2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j})\text{ m}$ και ενός άλλου μάζας $m_2 = 5\text{ kg}$ είναι $\mathbf{r}_2 = ((t^2 - 3t)\mathbf{i} + (2t - 1)\mathbf{j})\text{ m}$. Και τα δύο σώματα ξεκινούν την κίνησή τους τη χρονική στιγμή $t = 0\text{ s}$.

α) Υπολογίστε μετά από πόσο χρόνο, t_s , θα συγκρουστούν. $t_s =$ _____ s,

β) Μετά από τη σύγκρουση τα δύο οχήματα συσσωματώνονται και κινούνται μαζί. Υπολογίστε την κοινή τους ταχύτητα. $\mathbf{v}_s =$ (_____) s

1. (3.0M) Ένα σωματίδιο γνωστής μάζας m , κινείται στο χώρο με διάνυσμα θέσης: $\mathbf{r}(t) = -2\mathbf{i} + (-9 + 3t)\mathbf{j} - t(4 - t^2/3)\mathbf{k}$. Οι αποστάσεις είναι σε μέτρα και ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

(α) Ποια η επιτάχυνση του σωματιδίου; (1M)

Έχουμε

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + (t^2 - 4)\mathbf{k}$$

Οπότε

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2t\mathbf{k}$$

(β) Ποια η στροφορμή του σωματιδίου ως προς την αρχή των αξόνων; (1M)

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$= m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = m \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -9+3t & -t(4-t^2/3) \\ 0 & 3 & t^2-4 \end{vmatrix}$$

Οπότε

$$\mathbf{L}(t) = m((-9+3t)(t^2-4)\mathbf{i} + 2(t^2-4)\mathbf{j} - 6\mathbf{k})$$

(γ) Αν μεταξύ άλλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα ασκείται και η δύναμη $\mathbf{F} = (5\mathbf{i} - 4\mathbf{j})N$ ποιο είναι το έργο που παράγει στα τρία πρώτα δευτερόλεπτα της κίνησης; (1M).

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_0^3 (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dt ,$$

Έχουμε όμως $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = (5\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) \cdot (0\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + (t^2 - 4)\mathbf{k}) = -12 \text{ Joule/sec}$ οπότε από το προηγούμενο ολοκλήρωμα έχουμε $W = -36 \text{ Joule}$

2. (1.5M) Σε ένα σώμα κατά την ευθύγραμμη μετατόπιση $\mathbf{s} = -7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, εκτός άλλων δυνάμεων, δρα και η δύναμη $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$. Οι αποστάσεις είναι σε cm και η δύναμη σε N . Να υπολογίσετε:

α) το έργο (σε *Joule*) που παράγει η δύναμη στο σωματίδιο και (0.5M)

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = (2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) \cdot (-7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) N \text{ cm} = 10 N \text{ cm} = 0.1 \text{ Joule}$$

β) τη γωνία (σε μοίρες) μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{F}$ και $\mathbf{s}$. (1.0M)

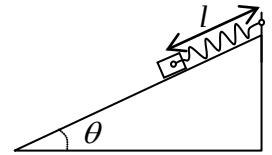
$$\text{Έχουμε } \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = Fs \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}}{Fs}$$

$$\text{Όμως, } \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = 10 N \text{ cm} , F = \sqrt{2^2 + (-4)^2} N = \sqrt{20} N , s = \sqrt{(-7)^2 + (-6)^2 + 6^2} \text{ cm} = 11 \text{ cm}$$

$$\text{Οπότε } \cos \theta = \frac{10}{11 \times \sqrt{20}} \approx 0.203 \Rightarrow \theta \approx 78.27^\circ$$

3. (1.5M) Σώμα μάζας M είναι συνδεδεμένο σε ιδανικό ελατήριο σταθεράς k_{el} με

φυσικό μήκος l_0 και βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ .



α) Αν αγνοήσουμε το συντελεστή τριβής μεταξύ του σώματος και του επιπέδου να υπολογίσετε τη σχετική επιμήκυνση, l/l_0 , του ελατηρίου στην ισορροπία. (0.5M) $l/l_0 =$ _____

β) Αν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι $\mu_s = 0.1$ υπολογίστε πόσο μπορούμε να επιμηκύνουμε το ελατήριο (από το φυσικό του μήκος) και το σώμα να παραμένει ακίνητο στο επίπεδο.

(1M) $\delta l =$ _____

α) Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε $F_{\tau p} = 0$.

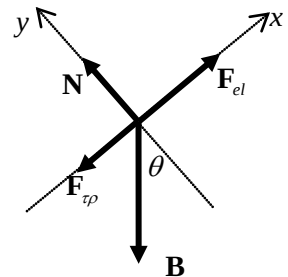
Στην ισορροπία έχουμε $\mathbf{N} + \mathbf{F}_{el} + \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (\sum \mathbf{F})_y = 0 \Rightarrow N = mg \cos \theta \\ (\sum \mathbf{F})_x = 0 \Rightarrow k(l - l_0) = mg \sin \theta \end{cases}$

Οπότε $l - l_0 = \frac{mg \sin \theta}{k} \Rightarrow \frac{l}{l_0} = 1 + \frac{mg \sin \theta}{kl_0}$

α) Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε $F_{\tau p} = -\mu_s N$.

Στην ισορροπία έχουμε $\mathbf{N} + \mathbf{F}_{el} + \mathbf{B} + \mathbf{F}_{\tau p} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (\sum \mathbf{F})_y = 0 \Rightarrow N = mg \cos \theta \\ (\sum \mathbf{F})_x = 0 \Rightarrow k(l - l_0) = mg \sin \theta + \mu_s N \end{cases}$

Οπότε $l - l_0 = \frac{mg \sin \theta + \mu_s mg \cos \theta}{k} \Rightarrow \delta l = \frac{mg}{k} (\sin \theta + \mu_s \cos \theta)$



4. (1M) Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται η δυναμική ενέργεια $U(x)$ ενός σωματιδίου που κινείται κατά μήκος του x -άξονα. Σε ποια από τα σημεία που επισημαίνονται στον άξονα x η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι

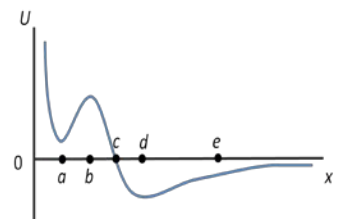
α) μηδενική, a, b, d , καθώς $(dU/dx)_{x=a, x=b, x=d} = 0$

και σε ποιες περιοχές η δύναμη είναι:

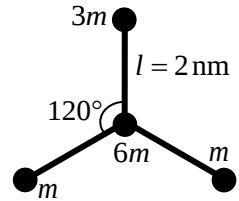
β) προς τη θετική διεύθυνση, $0-a, b-d$

γ) προς την αρνητική διεύθυνση, $a-b, d-\infty$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας. $F_x = -dU/dx$



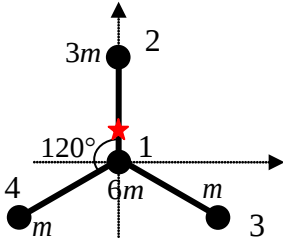
5. (2.0M) Θεωρείστε το διπλανό στερεό σώμα, που αποτελείται από τέσσερεις συνεπίπεδες μάζες, στο οποίο οι αποστάσεις της όλων των μαζών από την κεντρική μάζα είναι ίσες, $l = 2 \text{ nm}$ και οι γωνίες που σχηματίζουν οι άξονες ανά δύο είναι ίσες.



α) Υπολογίστε τη θέση του κέντρου μάζας και σημειώστε επάνω στο σχήμα. (0.5M)

β) Ποια η ροπή αδράνειας περί του άξονα που ορίζεται από την κεντρική μάζα και τη μάζα $3m$; (0.75M) $I_1 =$ _____

γ) Ποια η ροπή αδράνειας για ως προς άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο του σώματος και διέρχεται από το κ.μ. του σώματος; (0.75M) $I_2 =$ _____



Ορίζουμε ένα σύστημα αξόνων με αρχή στην κεντρική μάζα, όπως φαίνεται στο σχήμα και αριθμούμε τις 4 μάζες.

α) έχουμε $\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{\sum_i m_i} \sum_i m_i \mathbf{r}_i$. Στο σύστημα αναφοράς που επιλέξαμε

έχουμε $\mathbf{r}_1 = 0$, $\mathbf{r}_2 = 0\mathbf{i} + l\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_3 = l \sin 60^\circ \mathbf{i} - l \cos 60^\circ \mathbf{j}$ και

$\mathbf{r}_4 = -l \sin 60^\circ \mathbf{i} - l \cos 60^\circ \mathbf{j}$.

Οπότε $\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{11m} (0\mathbf{i} + 3ml\mathbf{j} - ml \cos 60^\circ \mathbf{j} - ml \cos 60^\circ \mathbf{j}) = \frac{3l - 2l(1/2)}{11} \mathbf{j} = 2l/11 \mathbf{j} \approx 0.18l\mathbf{j}$

β) η ροπή αδράνειας σώματος για περιστροφή περί του άξονα 1-2 είναι $I_{12} = \sum m_i d_i^2$ όπου d_i η απόσταση της μάζας i από τον άξονα περιστροφής. Έχουμε

$$I_{12} = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + m_3 d_3^2 + m_4 d_4^2 = 0 + 0 + m(l \sin 60^\circ)^2 + m(l \sin 60^\circ)^2 = 2ml^2(3/4) = (3/2)ml^2$$

γ) Η ροπή αδράνειας ως προς άξονα που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετος στο επίπεδο των μαζών είναι, όπως και προηγουμένως, $I_0 = \sum m_i d_i^2$. Οι αποστάσεις d_i είναι οι αποστάσεις των μαζών

από τον άξονα περιστροφής οπότε $I_0 = \sum m_i d_i^2 = 0 + 3ml^2 + ml^2 + ml^2 = 5ml^2$. Για τον υπολογισμό της ροπής

αδράνειας για τον άξονα που διέρχεται από το κ.μ. χρησιμοποιούμε το θεώρημα των παράλληλων αξόνων

και έχουμε $I_{cm} = I_0 + m_{tot} r_{cm}^2 = 5ml^2 + 11m(0.18l)^2 \approx 5.356ml^2$

- 6.** (2.0M) Το διάνυσμα θέσης ενός σώματος μάζας $m_1=20\text{kg}$ είναι $\mathbf{r}_1 = (-2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j})\text{m}$ και ενός άλλου μάζας $m_2=5\text{ kg}$ είναι $\mathbf{r}_2 = ((t^2 - 3t)\mathbf{i} + (2t - 1)\mathbf{j})\text{m}$. Και τα δύο σώματα ξεκινούν την κίνησή τους τη χρονική στιγμή $t = 0\text{s}$. **α)** Υπολογίστε μετά από πόσο χρόνο, t_s , θα συγκρουστούν. $t_s = \underline{\hspace{2cm}}\text{s}$,
β) Μετά από τη σύγκρουση τα δύο οχήματα συσσωματώνονται και κινούνται μαζί. Υπολογίστε την κοινή τους ταχύτητα. $\mathbf{v}_s = (\underline{\hspace{2cm}})\text{s}$

α) Συγκρούονται όταν θα βρεθούν στο ίδιο σημείο στο χώρο. Δηλαδή όταν $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ ή ισοδύναμα όταν

$$\begin{cases} -2 = t^2 - 3t \\ t^2 = 2t - 1 \end{cases} \Rightarrow t = 1\text{sec}$$

β) από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f \Rightarrow m_1\mathbf{v}_1(t=1\text{s}) + m_2\mathbf{v}_2(t=1\text{s}) = (m_1 + m_2)\mathbf{v}_f \Rightarrow \mathbf{v}_f = \frac{m_1\mathbf{v}_1(t=1\text{s}) + m_2\mathbf{v}_2(t=1\text{s})}{(m_1 + m_2)}$$

Έχουμε όμως $\mathbf{v}_1 = d\mathbf{r}_1 / dt = (0\mathbf{i} + 2t\mathbf{j})\text{m/s}$, $\mathbf{v}_1(t=1\text{s}) = (0\mathbf{i} + 2\mathbf{j})\text{m/s}$ και

$\mathbf{v}_2 = d\mathbf{r}_2 / dt = ((2t - 3)\mathbf{i} + 2\mathbf{j})\text{m/s}$, $\mathbf{v}_2(t=1\text{s}) = (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j})\text{m/s}$ οπότε

$$\mathbf{v}_f = \frac{m_1(0\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) + m_2(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j})}{(m_1 + m_2)}\text{m/s} = \left(-\frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{i} + 2\mathbf{j}\right)\text{m/s} = \left(-\frac{1}{5}\mathbf{i} + 2\mathbf{j}\right)\text{m/s}$$